0.1 Laplacova rovnica

Kvalitatívne vlastnosti

Veta o strednej hodnote

Uvažujme Laplacovu rovnicu

$$\nabla^2 u = 0$$

na kruhovej oblasti $r < a$, $-\pi < \phi \leq pi$, s okrajovou podmienkou $u(a, \theta) = f(\theta)$.

V predošlej časti sme odvodili, že riešením je funkcia

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^n \sin n\theta$$

pričom

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta \\ A_n a^n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta\, d\theta \\ B_n a^n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta\, d\theta. \end{aligned}$$

Po dosadení $r = 0$ do riešenia, získame

$$u(0, \theta) = A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta$$

Inými slovami v teplota v strede kruhu je presne priemerná teplota pozdĺž okraja kruhu.

Tento fakt platí všeobecnejšie pre ľubovoľnú oblasť R v nasledovnej forme: Ak u je riešenie $\nabla^2 u = 0$ s danými hodnotami na $f(x)$ na okraji ∂R oblasti R a bod $a_0 \in R$ je stredom kruhu D_{a_0}, ktorý celý leží v oblasti R, tak $u(a_0)$ je integrálny priemer funkcie $u(x)$ na hranici kruhu ∂D_{a_0}.

Čiže voľne povedané pre prípad stacionárneho rozloženia teploty v oblasti R, teplota v ľubovoľnom bode oblasti R je rovná priemernej teplote na ľubovoľnej kružnici so stredom v a_0 ležiacej vnútri oblasti R.

Princíp maxima

Je vlastne dôsledkom vety o strednej hodnote. Princíp maxima hovorí, že nekonštantné riešenie Laplacovej rovnice nemôže mať maximum vnútri oblasti R. Takže nekonštantné riešenie $\nabla^2 u = 0$ má riešenie len na ∂R.

Naznačíme dôvod, prečo je to tak. Ak by v bode P z vnútra oblasti R bolo maximum riešenia, vezmime kruh D_P so stredom v bode P, ktorý celý leží v oblasti R. Keďže v hodnota riešenia v bode P je priemerom hodnôt na okraji ∂D_P, ale zároveň v P je maximálna hodnota, musí byť v celom kruhu rovnaká hodnota ako v bode P, t.j. riešenie musí byť v celom tomto kruhu konštantné. Potom ale riešenie je konštantné pozdĺž ľubovoľnej cesty medzi bodom P a ľubovoľným iným bodom oblasti R – stačí uvažovať vhodné kruhy pozdĺž cesty a pre každý zopakovať Predošlý argument. Takto ale ukážeme, že uvažované riešenie je konštantné vnútri oblasti R, čiže ak by riešenie malo maximum vnútri oblasti R, tak je nutne konštanté.

Zrejme ak u je riešenie rovnice $\nabla^2 u = 0$, tak $-u$ je tiež riešením a ak v bode P má u maximum, tak v bode P má $-u$ minimum, a teda maximum a minimum môže riešenie Laplacovej rovnice dosahovať len na okraji oblasti.

Riešenie $\nabla^2 u$ je jednoznačné a spojite závisí na nehomogénnych dátach

Nech u je riešenie $\nabla^2 u = 0$ na oblasti R s $u = f(x)$ na okraji oblasti a v je riešenie $\nabla^2 v = 0$ na oblasti R s $v = g(x)$ na okraji oblasti. Potom $w = u - v$ je riešením $\nabla^2 w = 0$ s $w = f(x) - g(x)$ na okraji oblasti. Z princípu maxima (a minima) dostávame

$$\min(f(x) - g(x)) \leq w \leq \max(f(x) - g(x))$$

z čoho ľahko odvodíme, že

$$\max|w| = \max|u - v| \leq \max|f(x) - g(x)|.$$

Takže ak $\max|f(x) - g(x)| < \epsilon$, tak $\max|u - v| < \epsilon$, z čoho vidno spojitú závislosť riešenia od nehomogénnych dát (ak sa začiatočné podmienky f a g líšia len málo, tak sa málo líšia aj riešenia).

Jednoznačnosť sa ukáže podobne. Ak u a v sú riešenie Laplacovej rovnice s okrajovou podmienkou $u = v = f(x)$ na okraji oblasti, tak funkcia $w = u - v$ je riešením Laplacovej rovnice s okrajovou podmienkou $w = 0$ na okraji oblasti. Potom ale z princípu maxima dostávame, že $0 \leq w \leq 0$, čiže $w = 0$, a teda $u - v = 0$, z čoho $u = v$.

Podmienky riešiteľnosti

Vezmime rovnicu $\nabla^2 u = 0$ na dvojrozmernej oblasti a dvakrát ju zintegrujme. Dostaneme

$$0 = \iint_R \nabla^2 u \, dS = \iint_R \nabla \cdot (\nabla u) \, dS = \oint_{\partial R} \nabla u \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, dl$$

kde $\hat{\boldsymbol{n}}$ je jednotkový vektor vonkajšej normály k hranici oblasti. Táto rovnosť platí práve vtedy, keď $\nabla u \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 0$ na ∂R. Všimnime si ale, že $\phi = -K_0 \nabla u \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$ je tepelný tok. Takže $\nabla^2 u = 0$ má riešenie práve vtedy, keď celkový tepelný tok pozdĺž hranice je nulový.

Príklad: (Úloha, ktorej riešenie nezávisí spojite na nehomogénnych dátach)
Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0 \\ u(x,0) &= f(x). \end{aligned}$$

Použitím metódy separácie premenných spočítame, že riešenie je

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

s koeficientami

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx.$$

Označme u' riešenie predošlej úlohy s pozmenenou začiatočnou podmienkou pre nejaké prirodzené číslo m

$$u(x,0) = f(x) + \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi x}{L}.$$

Potom $\max |f(x) + \frac{1}{m} \sin \frac{k\pi x}{L} - f(x)| = \frac{1}{m}$ čiže začiatočné podmienky sa pre veľké m líšia len málo.

Ak však spočítame koeficienty riešenia pre pozmenenú začiatočnú podmienku, dostaneme

$$A'_r = A_r + \begin{cases} 0, & r \neq m \\ \frac{1}{m} & r = m. \end{cases}$$

a teda riešenie pre túto začiatočnú podmienku je

$$u'(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} + \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi x}{L} e^{k\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 t}.$$

Avšak $\max |u' - u| = \max |\frac{1}{m} \sin \frac{m\pi x}{L} e^{k\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 t}| = \frac{1}{m} e^{k\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 t}$ je pre veľké m (t.j. pre blízke začiatočné podmienky) veľké.

Literatúra

[1] Richard Haberman: *Applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*, Pearson Education Inc., 2013.